Grenzwerte von Folgen

Wolfgang Kippels

26. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Dieses Skript stellt keinen Lehrgang dar. Hier sollen nur Zusammenhänge dargestellt werden, die als bekannt vorausgesetzt werden. Der Schwerpunkt liegt auf Übungsaufgaben und deren Lösungen.

3 Definition und Lehrsätze

3.1 Definition des Grenzwertes

g heißt **Grenzwert** der Folge $\langle a_n \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq n_0 : \quad |g - a_n| < \varepsilon$

Im Klartext liest sich das so:

> g heißt **Grenzwert** der Folge $\langle a_n \rangle$ genau dann, wenn für alle positiven Zahlen ε gilt: es existiert immer eine Natürliche (positive) Zahl n_0, so dass für alle Natürlichen Zahlen n, die mindestens so groß wie n_0 sind, der Abstand zwischen g und a_n kleiner als ε ist.

Es gilt diese Schreibweise:

$$g \text{ heißt } \textbf{Grenzwert} \text{ der Folge } \langle a_n \rangle \quad \Leftrightarrow \quad g = \lim_{n \to \infty} a_n$$

3.2 Grenzwertlehrsätze

Unter der Bedingung, dass die jeweiligen Teilgrenzwerte existieren, gelten folgende Lehrsätze:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\
(2) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\
(3) & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} & = & \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}
\end{array}$$

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3$$

4.2 Aufgabe 2

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{2n-5} = 2$$

4.3 Aufgabe 3

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-10n}{15-2n} = 5$$

4.4 Aufgabe 4

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n-2} = 0$$

4.5 Aufgabe 5

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{-3n-3} = 0$$

4.6 Aufgabe 6

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-4}{-3n-10} = -4$$

4.7 Aufgabe 7

Weisen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe einer ε-Umgebung nach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-4}{-2n+11} = -4$$

4.8 Aufgabe 8

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} = \ldots$$

4.9 Aufgabe 9

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} = \ldots$$

4.10 Aufgabe 10

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2+3}{n^2-4n} = \ldots$$

4.11 Aufgabe 11

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n}{n^2-2n-1} = \ldots$$

4.12 Aufgabe 12

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} = \ldots$$

4.13 Aufgabe 13

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n+5n^3-4}{3n^2+5n-10n^3} = \ldots$$

4.14 Aufgabe 14

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge – so weit vorhanden – mit Hilfe der Grenzwertlehrsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-4n^2}{3n^2+3n-2n^4} = \ldots$$

5 Lösungen

Bei Aufgabe 1 bis 7 kommt es darauf an, dass die Rechnung aufgeht mit n auf der größeren Seite des Zeichens $<$, also mit $n > \ldots$ oder $\cdots < n$. Ist das der Fall, dann ist der Beweis erbracht.

5.1 Aufgabe 1

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|3 - \frac{3n-2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3(n+5)}{n+5} - \frac{3n-2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3n+15-3n+2}{n+5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{17}{n+5}\right| &< \varepsilon \quad | \text{ Zähler und Nenner ist positiv} \\
\frac{17}{n+5} &< \varepsilon \quad | \cdot (n+5) \text{ (Faktor positiv)} \\
17 &< \varepsilon \cdot (n+5) \quad | : \varepsilon \text{ (Teiler positiv)} \\
\frac{17}{\varepsilon} &< n+5 \quad | -5 \\
\frac{17}{\varepsilon} - 5 &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.2 Aufgabe 2

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{2n-5} = 2$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|2 - \frac{4n-2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2(2n-5)}{2n-5} - \frac{4n-2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{4n-10-4n+2}{2n-5}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-8}{2n-5}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 2$ eingegrenzt. In dem Bereich ist der Zähler negativ, der Nenner positiv. Beim Auflösen des Betrages muss also das Vorzeichen geändert werden.

$$\begin{aligned}
\frac{8}{2n-5} &< \varepsilon \quad | \cdot (2n-5) \\
8 &< \varepsilon \cdot (2n-5) \quad | : \varepsilon \\
\frac{8}{\varepsilon} &< 2n-5 \quad | + 5 \\
\frac{8}{\varepsilon} + 5 &< 2n \quad | : 2 \\
\frac{\frac{8}{\varepsilon} + 5}{2} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.3 Aufgabe 3

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-10n}{15-2n} = 5$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left| 5 - \frac{5-10n}{15-2n} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{5(15-2n)}{15-2n} - \frac{5-10n}{15-2n} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{75-10n-5+10n}{15-2n} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{70}{15-2n} \right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 7$ eingegrenzt. In dem Bereich ist der Zähler positiv, der Nenner negativ. Beim Auflösen des Betrages muss also das Vorzeichen geändert werden.

$$\begin{aligned}
-\frac{70}{15-2n} &< \varepsilon \quad | \cdot (15-2n) \quad \text{(Der Faktor ist negativ!)} \\
-70 &> \varepsilon \cdot (15-2n) \quad | : \varepsilon \\
-\frac{70}{\varepsilon} &> 15-2n \quad | -15 \\
-\frac{70}{\varepsilon} - 15 &> -2n \quad | : (-2) \\
\frac{-\frac{70}{\varepsilon} - 15}{-2} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.4 Aufgabe 4

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n-2} = 0$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|0 - \frac{5}{3n-2}\right| &< \varepsilon \\
\left|-\frac{5}{3n-2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{5}{3n-2} &< \varepsilon \quad |\cdot(3n-2) \\
5 &< \varepsilon\cdot(3n-2) \quad |:\varepsilon \\
\frac{5}{\varepsilon} &< 3n-2 \quad |+2 \\
\frac{5}{\varepsilon}+2 &< 3n \quad |:3 \\
\frac{\frac{5}{\varepsilon}+2}{3} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.5 Aufgabe 5

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{-3n-3} = 0$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|0 - \frac{2}{-3n-3}\right| &< \varepsilon \\
\left|-\frac{2}{-3n-3}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Der Nenner des Bruches ist stets negativ, der Zähler positiv. Da noch vor dem Bruch ein Minuszeichen steht, ist der Betragsinhalt positiv.

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{-3n-3} &< \varepsilon \quad |\cdot(-3n-3) \qquad \text{(Achtung! Nenner negativ.)} \\
-2 &> \varepsilon \cdot (-3n-3) \quad |:\varepsilon \\
-\frac{2}{\varepsilon} &> -3n-3 \quad |+3 \\
-\frac{2}{\varepsilon} + 3 &> -3n \quad |:(-3) \\
\frac{-\frac{2}{\varepsilon}+3}{-3} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.6 Aufgabe 6

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-4}{-3n-10} = -4$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|-4 - \frac{12n-4}{-3n-10}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-4(-3n-10)}{-3n-10} - \frac{12n-4}{-3n-10}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{12n+40-12n+4}{-3n-10}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{44}{-3n-10}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Der Nenner des Bruches ist stets negativ, der Zähler positiv. Daher kehrt sich beim Auflösen des Betrages das Vorzeichen um.

$$\begin{aligned}
-\frac{44}{-3n-10} &< \varepsilon \quad |\cdot(-3n-10) \quad \text{(Negativer Nenner!)} \\
-44 &> \varepsilon\cdot(-3n-10) \quad |:\varepsilon \\
-\frac{44}{\varepsilon} &> -3n-10 \quad |+10 \\
-\frac{44}{\varepsilon}+10 &> -3n \quad |:(-3) \\
\frac{-\frac{44}{\varepsilon}+10}{-3} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.7 Aufgabe 7

Nachzuweisen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-4}{-2n+11} = -4$$

Es muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $|g - a_n| < \varepsilon$ für alle n ab einem Startwert n_0 erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\left|-4 - \frac{8n-4}{-2n+11}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-4\cdot(-2n+11)}{-2n+11} - \frac{8n-4}{-2n+11}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{8n-44-8n+4}{-2n+11}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-40}{-2n+11}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die weitere Untersuchung auf alle $n > 5$ eingegrenzt. In diesem Bereich ist der Zähler **und** der Nenner negativ. Beim Auflösen des Betrages bleibt also das Vorzeichen erhalten.

$$\begin{aligned}
\frac{-40}{-2n+11} &< \varepsilon \quad |\cdot(-2n+11) \qquad \text{(Nenner negativ!)} \\
-40 &> \varepsilon\cdot(-2n+11) \quad |:\varepsilon \\
-\frac{40}{\varepsilon} &> -2n+11 \quad |-11 \\
-\frac{40}{\varepsilon} - 11 &> -2n \quad |:(-2) \\
\frac{-\frac{40}{\varepsilon}-11}{-2} &< n
\end{aligned}$$

n steht auf der größeren Seite des Ungleichungszeichens. $\Rightarrow$ Der Beweis ist erbracht.

5.8 Aufgabe 8

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(12-\frac{9}{n}\right)}{n\cdot\left(-3-\frac{4}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{12-\frac{9}{n}}{-3-\frac{4}{n}} \quad \mid \text{Quotientenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(12-\frac{9}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3-\frac{4}{n}\right)} \quad \mid \text{Summenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3) - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} \quad \mid \text{Konstantenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - 9\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3) - 4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \quad \mid \text{Grenzwerte einsetzen} \\
&= \frac{12-9\cdot 0}{-3-4\cdot 0} \\
&= -\frac{12}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{12n-9}{-3n-4} &= -4
\end{aligned}$$

5.9 Aufgabe 9

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^2 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \left(6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}\right)} \quad \mid \text{Kürzen} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}} \quad \mid \text{Quotientenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}\right)} \quad \mid \text{Summenregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{n^2}} \quad \mid \text{Konstantenregel/Produktregel} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 10 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \quad \mid \text{Grenzwerte eins.} \\
&= \frac{6+3\cdot 0 - 0 \cdot 0}{3 + 3 \cdot 0 - 10 \cdot 0 \cdot 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{3n^2+3n-10} &= 2
\end{aligned}$$

5.10 Aufgabe 10

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^2 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{4}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{4}{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4}{n}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{0 - 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 4 \cdot 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n - n^2 + 3}{n^2 - 4n} &= -1
\end{aligned}$$

5.11 Aufgabe 11

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1}$$

Da weder im Zähler noch im Nenner ein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^3 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(2 - \frac{4}{n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n}{n^2 - 2n - 1} &= \frac{2 - 4 \cdot 0 \cdot 0}{0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0}
\end{aligned}$$

Der Nenner ist Null. Das bedeutet, der Bruch ist **nicht definiert**, der gesuchte Grenzwert **existiert nicht**!

5.12 Aufgabe 12

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5}$$

Da im Nenner kein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^2 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \frac{4}{n^2}}{n^2 \cdot \left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}}{\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{5}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} \\
&= \frac{4 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + 5 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{4 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+5} &= 0
\end{aligned}$$

5.13 Aufgabe 13

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n + 5n^3 - 4}{3n^2 + 5n - 10n^3} = \dots$$

Da im Nenner kein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^3 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{12n + 5n^3 - 4}{3n^2 + 5n - 10n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(\frac{12}{n^2} + 5 - \frac{4}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - 10\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{12}{n^2} + 5 - \frac{4}{n^3}}{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - 10} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{12}{n^2} + 5 - \frac{4}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - 10\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 10} \\
&= \frac{12 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} 5 - 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 10} \\
&= \frac{12 \cdot 0 + 5 - 4 \cdot 0}{3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 10} \\
&= \frac{5}{-10} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{12n + 5n^3 - 4}{3n^2 + 5n - 10n^3} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5.14 Aufgabe 14

Zu bestimmen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - 4n^2}{3n^2 + 3n - 2n^4} = \ldots$$

Da im Nenner kein Teilgrenzwert existiert, muss der Bruch erst umgeformt werden, bevor man die Quotientenregel anwenden kann. Wir klammern im Zähler und im Nenner n^4 aus und kürzen anschließend dadurch. Da stets $n \neq 0$ ist, ist das möglich.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - 4n^2}{3n^2 + 3n - 2n^4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot \left(\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}\right)}{n^4 \cdot \left(\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} - 2\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} - 2} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} - 2\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} \\
&= \frac{6 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} \\
&= \frac{6 \cdot 0 - 4 \cdot 0}{3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2} \\
&= \frac{0}{-2} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - 4n^2}{3n^2 + 3n - 2n^4} &= 0
\end{aligned}$$